6. Konštitutívne rovnice

Látka, ktorá vypĺňa kontinuum, sa vyznačuje určitými materiálovými vlastnosťami. Zákony, alebo rovnice, ktoré popisujú správanie sledovaného materiálu pri pôsobení vonkajších vplyvov, sa nazývajú konštitutívnymi rovnicami. V pružnosti je to zákon, ktorý určuje vzájomný vzťah medzi napätím a pretvorením, v termomechanike medzi stavovými veličinami, atď... . My sa budeme hlavne zaoberať vzájomným vzťahom medzi napätím a deformáciou.

Pre veľký počet pevných látok sú deformácie proporcionálne k zaťaženiu. Experimentálne získaný fakt, že s narastaním zaťaženia narastajú deformácie a s klesaním zaťaženia deformácie klesajú a napokon po vymiznutí zaťaženia deformácie vymiznú, čo nám stanovuje Hookeov zákon, viedlo k jeho zovšeobecneniu. Podľa zovšeobecneného Hookeovho zákona je každá zložka stavu napätosti lineárnou funkciou zložiek deformácie v danom bode telesa. V matematickom tvare

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}$$

kde τ_{ij} je tenzor napätia, ε_{kl} tenzor nekonečne malých deformácií a C_{ijkl} je tenzor 4. rádu, ktorý má $3^4 = 81$ zložiek. Tieto zložky popisujú materiálové vlastnosti kontinua. Tento idealizovaný zákon popisuje pomerne dobré správanie troch skupín materiálov:

a) hookeovské pružné teleso;
b) neviskóznu kvapalinu;
c) newtonovskú viskóznu tekutinu.

Zovšeobecnený Hookeov zákon idealizuje správanie uvedených materiálov a približuje ho viac alebo menej ku skutočnosti. Keď sú rozdiely v správaní materiálu príliš veľké, hovoríme o reálnom plyne, nenewtonovskej tekutine, viskoelastickom prostredí, plasticite, ..., ktorých popísanie je omnoho komplikovanejšie. V tejto kapitole budú uvedené konštitutívne rovnice len pre tri skupiny materiálov, pretože poslucháči špecializácie "Aplikovaná mechanika", ktorým sú tieto skriptá určené, sa v špeciálnych predmetoch zaoberajú mechanikou tekutín, plynov, príp. teóriou plasticity.

6.1 HOOKEOVSKÉ ELASTICKÉ PEVNÉ TELESO

Prof. Ing. František Janíček, PhD.
garant ŠP Elektroenergetika

Budeme sa zaoberať pevným telesom schopným sa deformovať tak, že vzájomný vzťah medzi napätím a deformáciou je lineárny, t.j. vyhovuje zovšeobecnenému Hookeovmu zákonu. Nech uvažované teleso, prípadne jeho časť má objem V a plochu S. Ak pôsobia na teleso vonkajšie sily, dochádza k jeho deformácii. Je zrejmé, že vonkajšie sily pritom konajú prácu, pretože v dôsledku posunutí pôsobia na určitej dráhe du_i. Túto prácu nazývame deformačnou prácou, a označíme ju W. V samotnom telese sa bude vplyvom deformácie akumulovať energia, ktorú nazývame deformačnou energiou U. Pri odľahčovaní telesa sa táto energia naspäť uvoľňuje, pretože vracia teleso do svojho pôvodného tvaru, čo znamená, že zas vnútorné sily konajú prácu. Ako ukazujú experimenty, deformácia je vo všeobecnosti nehomogénna, a preto i deformačná energia môže byť v telese rozložená nerovnomerne. Preto zavádzame tzv. pomernú energiu deformácie, resp. hustotu deformačnej energie dU. Predstavuje nám energiu v danom bode telesa vzťahovanú na jednotku počiatočného objemu. Keď predpokladáme proces deformácie za adiabatický, musí sa deformačná práca rovnať deformačnej energii

$$dW = dW_B + dW_S = d\left(\int_V U dV \right) = \int_V (dU) dV \qquad (6.1-1)$$

V rovnici (6.1-1) dW_B predstavuje deformačnú prácu objemových síl

$$dW_B = \int_V K_i du_i dV = \iiint_V (K_1 du_1 + K_2 du_2 + K_3 du_3) dV \qquad (6.1-2)$$

ďalej dW_S je práca plošných síl

$$dW_S = \int_S \overset{j}{T}_i du_i dS = \int_S \tau_{ji} \nu_j du_i dS \qquad (6.1-3)$$

kde $\overset{j}{T}_i = \tau_{ji} \nu_j$ sú zložky vektora napätia, τ_{ji} sú zložkami tenzora napätia v bode plochy s vonkajšou normálou ν_j. Výraz (6.1-3) upravíme pomocou Gausovej vety

$$\int_S \tau_{ji} \nu_j du_i dS = \int_S (\tau_{ji} du_i) \nu_j dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} du_i) dV \qquad (6.1-4)$$

Dosadením (6.1-4) a (6.1-2) do rovnice (6.1-1) dostaneme

$$\int_V K_i du_i dV + \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ji} du_i) dV = \int_V (dU) dV \qquad (6.1\text{-}5)$$

Urobíme nazhačenú deriváciu vo vzťahu pre plošné sily a rovnicu upravíme do tvaru

$$\int_V \left(K_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) du_i dV + \int_V \tau_{ji} \frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) dV = \int_V (dU) dV \qquad (6.1\text{-}6)$$

Ak sa uvažované teleso nachádza v statickej rovnováhe, potom prvý člen v (6.1-6) je vzhľadom na podmienku rovnováhy nulový, čím sa nám táto rovnica upraví na

$$\int_V \tau_{ji} d\epsilon_{ij} dV = \int_V (dU) dV \qquad (6.1\text{-}7)$$

Zrejme platí úprava

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (du_i) = d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = d\epsilon_{ij} \qquad (6.1\text{-}8)$$

pričom $\epsilon_{ij} = u_{i,j}$ sú zložky gradientu deformácie.

Z rovnosti integrálov v (6.1-7) vyplýva rovnosť integrantov, t.j.

$$\tau_{ji} d\epsilon_{ij} = dU \qquad (6.1\text{-}9)$$

a odtiaľ

$$\tau_{ji} = \tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \qquad (6.1\text{-}10)$$

Ak z gradientu deformácie vynecháme nekonečne malé rotácie, potom $\epsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ a deformačná energia bude funkciou zložiek tenzora malých deformácií ($U = U(\varepsilon_{ij})$). Dôsledkom toho môžeme rovnicu (6.1-10) vyjadriť v tvare

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad (6.1\text{-}11)$$

Pre jednotlivé zložky tenzora napätia z (6.1-11) dostaneme

$$\tau_{11} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{11}}, \quad \tau_{22} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{22}}, \ldots, \quad \tau_{32} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{32}} \qquad (6.1\text{-}12)$$

Ak účinkom vonkajších síl je zmena stavu telesa izotermálna, dá sa dokázať, že funkcia U existuje a spĺňa rovnice (6.1-6). Funkciu U, ako sme už spomenuli, nazývame funkciou hustoty deformačnej energie. Použitie tejto funkcie a z nej odvodené vzťahy je možné len pre telesá pružné, u ktorých je možný návrat do svojho originálneho tvaru, keď vymiznú napätia.

6.2 ZOVŠEOBECNENÝ HOOKEOV ZÁKON

Ako sme už uviedli v úvode tejto kapitoly, pri zovšeobecnení Hookeovho zákona predpokladáme, že každá zo zložiek tenzora napätia je lineárnou funkciou zložiek tenzora deformácie. To je možné zapísať rovnicou

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \qquad (6.2\text{-}1)$$

kde tenzor štvrtého rádu, C_{ijkl}, tiež nazývame tenzorom pružnosti. Tento tenzor má $3^4 = 81$ zložiek. Ako uvidíme neskôr, tenzor pružnosti sa nám zjednoduší, pretože nie všetky jeho zložky sú nezávislé a niektoré môžu byť aj nulové.

Zo vzťahu (6.2-1) napr. pre τ_{12} dostaneme

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= C_{1211}\,\varepsilon_{11} + C_{1221}\,\varepsilon_{21} + C_{1231}\,\varepsilon_{31} = \\ &= C_{1211}\,\varepsilon_{11} + C_{1212}\,\varepsilon_{12} + C_{1213}\,\varepsilon_{13} + \\ &+ C_{1221}\,\varepsilon_{21} + C_{1222}\,\varepsilon_{22} + C_{1223}\,\varepsilon_{23} + \\ &+ C_{1231}\,\varepsilon_{31} + C_{1232}\,\varepsilon_{32} + C_{1233}\,\varepsilon_{33}\end{aligned}$$

Pretože tenzor napätia je symetrický, bude platiť

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

a po zohľadnení (6.2-1) dostaneme

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} = \tau_{ji} = C_{jikl}\,\varepsilon_{kl} \qquad (6.2\text{-}2)$$

Odtiaľ vyplýva

$$C_{ijkl} = C_{jikl} \qquad (6.2\text{-}3)$$

$C_{12kl} = C_{21kl}$
$C_{13kl} = C_{31kl}$
$C_{23kl} = C_{32kl}$

Teraz ukážeme, že tenzor pružnosti je symetrický aj v dvoch posledných indexoch. Za tým účelom predpokladajme, že teleso je v takom deformačnom stave, kde rôzne od nuly sú len zložky deformácie $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$.

Pre tento špeciálny prípad môžeme (6.2-1) písať v tvare

$$\tau_{ij} = C_{ij12}\,\varepsilon_{12} + C_{ij21}\,\varepsilon_{21} \qquad (6.2\text{-}4)$$

alebo

$$\tau_{ij} = (C_{ij12} + C_{ij21})\,\varepsilon_{12} \qquad (6.2\text{-}5)$$

$\tau_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} = C_{ijlk}\,\varepsilon_{lk}$

$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$

$\Rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk}$!

Zaveďme si novú konštantu C'_{ij12} definovanú výrazom

$$C'_{ij12} = -(C_{ij12} + C_{ij21}) \qquad (6.2\text{-}6)$$

Vidíme, že C'_{ij12} je symetrická v dvoch posledných indexoch. Využitím (6.2-6) môžeme rovnicu (6.2-5) upraviť

$$\tau_{ij} = 2\,C'_{ij12}\,\varepsilon_{12} = (C'_{ij12} + C_{ij21})\,\varepsilon_{21} \qquad (6.2\text{-}7)$$

Porovnaním (6.2-7) a (6.2-4) je zrjmé, že C_{ijkl} je symetrický aj v druhých dvoch indexoch k a l, a potom

$$\underline{C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{jikl}} \qquad (6.2\text{-}8)$$

$C_{ij12} = C_{ij21}$
$C_{ij13} = C_{ij31}$
$C_{ij32} = C_{ij23}$

Na základe (6.2-8) môžeme vzťah pre zložku napätia τ_{12} upraviť na tvar

$$\tau_{12} = C_{1211}\,\varepsilon_{11} + C_{1222}\,\varepsilon_{22} + C_{1233}\,\varepsilon_{33} + + 2\,(C_{1212}\,\varepsilon_{12} + C_{1213}\,\varepsilon_{13} + C_{1232}\,\varepsilon_{32})$$

Využitím symetrie tenzora pružnosti sa nám zredukuje počet jeho nezávislých zložiek z 81 na 36 konštánt.

Za predpokladu existencie funkcie hustoty deformačnej energie U môžeme počet konštánt ďalej znížiť.

V zhode s rovnicou (6.1-5) dostaneme

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{11}} = \tau_{11} = C_{1111}\,\varepsilon_{11} + C_{1122}\,\varepsilon_{22} + \dots + C_{1132}\,\varepsilon_{32}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{22}} = \tau_{22} = C_{2211}\,\varepsilon_{11} + C_{2222}\,\varepsilon_{22} + \dots + C_{2232}\,\varepsilon_{32} \qquad (6.2\text{-}9)$$

Odtiaľ

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{11}\partial \varepsilon_{22}} = C_{1122} = \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{22}\partial \varepsilon_{11}} = C_{2211}$$

$\Rightarrow C_{1122} = C_{2211}$

A vo všeobecnosti bude platiť rovnosť

$C_{1331} = C_{3113}$

$\vdots$

etc...

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{ij}\partial \varepsilon_{kl}} = C_{ijkl} = C_{klij} \qquad (6.2\text{-}10)$$

Rovnica (6.2-10) nám hovorí, že tenzor C_{ijkl} musí byť symetrickým i pri zámene prvej dvojice indexov s druhou:

$$C_{ijkl} = C_{klij} \qquad (6.2\text{-}11)$$

Tým sa nám vo všeobecnom prípade znižuje počet nezávislých konštánt pružnosti na 21. Týchto 21 koeficientov popisuje elastické vlastnosti v tesnom okolí určitého bodu a vo všeobecnom prípade môžu byť funkciami polohy bodu (jeho súradníc). Napríklad pri konečných deformáciách musíme robiť rozdiel medzi deformovanou a nedeformovanou konfiguráciou telesa. V tomto prípade treba, vzhľadom na príslušnú transformáciu, považovať tieto konštanty za závislé veličiny od polohy sledovaného bodu. Vo väčšine prípadov sa však tomuto problému pristupuje dogmaticky a tenzor pružnosti sa nepodrobuje transformácii pri prechode z jednej konfigurácie telesa do druhej. Taktiež sa predpokladá homogénnosť elastických vlastností, t.j. v každom bode uvažovaného telesa sú elastické vlastnosti konštantné a rovnaké. Podmienky homogénnosti vlastností pružnosti však plne vyhovujú len v teórii malých deformácií.

!! Zložky tenzora pružnosti sa zvyknú označovať aj dvojindexovými symbolmi A_{ij}, $i,j = 1,2,\dots,6$.

Napríklad:

$$
\begin{aligned}
\tau_{11} &= C_{11kl}\,\varepsilon_{kl} = C_{1111}\,\varepsilon_{11} + C_{1121}\,\varepsilon_{21} + C_{1131}\,\varepsilon_{31} = \\
&= C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1122}\,\varepsilon_{22} + C_{1133}\,\varepsilon_{33} + \\
&+ (C_{1112} + C_{1121})\,\varepsilon_{12} + (C_{1123} + C_{1132})\,\varepsilon_{23} + \\
&+ (C_{1131} + C_{1113})\,\varepsilon_{31} = \overbrace{C_{1111}}^{A_{11}}\,\varepsilon_{11} + \overbrace{C_{1122}}^{A_{12}}\,\varepsilon_{22} + \overbrace{C_{1133}}^{A_{13}}\,\varepsilon_{33} + \\
&+ \overbrace{2\,C_{1112}}^{A_{14}}\,\varepsilon_{12} + \overbrace{2\,C_{1123}}^{A_{15}}\,\varepsilon_{23} + \overbrace{2\,C_{1131}}^{A_{16}}\,\varepsilon_{31} = \\
&= A_{11}\,\varepsilon_{11} + A_{12}\,\varepsilon_{22} + A_{13}\,\varepsilon_{33} + A_{14}\,\varepsilon_{12} + A_{15}\,\varepsilon_{23} + A_{16}\,\varepsilon_{31}
\end{aligned}
$$

V maticovom tvare vyjadríme nezávislé zložky tenzora napätia pomocou nezávislých koeficientov C_{ijkl}, resp. A_{ij} takto:

$$
\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\
A_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{26} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_{66}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}
\qquad (6.2\text{-}12)
$$

$$
\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\
C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\
C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\
C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\
C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\
C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}
\qquad (6.2\text{-}13)
$$

Ako sme už uviedli, vzhľadom na symetriu (6.2-1), počet nezávislých zložiek elastických vlastností sa nám zníži z 36 na 21 (6 na diagonále matice mater. vlastnosti + polovičku zo zvyšných 30 členov). Pre maticu vo vzťahu (6.2-13) sme už tento fakt dokázali. Podobným spôsobom to urobíme pre maticu vo vzťahu (6.2-12). Pre zložky napätia platí

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{11}} = \tau_{11} = A_{11}\,\varepsilon_{11} + \underline{A_{12}\,\varepsilon_{22}} + A_{13}\,\varepsilon_{33} + A_{14}\,\varepsilon_{12} + A_{15}\,\varepsilon_{23} + A_{16}\,\varepsilon_{31}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{22}} = \tau_{22} = \underline{A_{21}\,\varepsilon_{11}} + A_{22}\,\varepsilon_{22} + A_{23}\,\varepsilon_{33} + A_{24}\,\varepsilon_{12} + A_{25}\,\varepsilon_{23} + A_{26}\,\varepsilon_{31}$$

Po derivácii prvej rovnice podľa ε_{22} a druhej podľa ε_{11} máme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{22}\partial \varepsilon_{11}} = A_{12}\,, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \varepsilon_{11}\partial \varepsilon_{22}} = A_{21} \qquad (6.2\text{-}14)$$

to znamená, že $A_{12} = A_{21}$. Na tomto základe môžeme tvrdiť, že

$$A_{ij} = A_{ji}$$

Treba si uvedomiť, že A_{ij} už nie sú zložkami tenzora a teda nemožno napísať všeobecný vzťah, obdobný tvrdeniu (6.2-10). Ako sme už spomenuli, materiálové vlastnosti sú tenzorom štvrtého stupňa a sú vo všeobecnosti závislé od transformácie súradnicového systému. To znamená, že ak v počiatočnom súradnicovom systéme (x_i, i = 1,2,3) má tenzor pružnosti zložky C_{ijkl}, potom v súradnicovom systéme natočenom (x_i', i = 1,2,3) budú zodpovedajúce zložky podrobené transformačnému zákonu tenzora 4. stupňa

$$C'_{opqr} = a_{oi}a_{pj}a_{qk}a_{rl}C_{ijkl} \qquad (6.2\text{-}15)$$

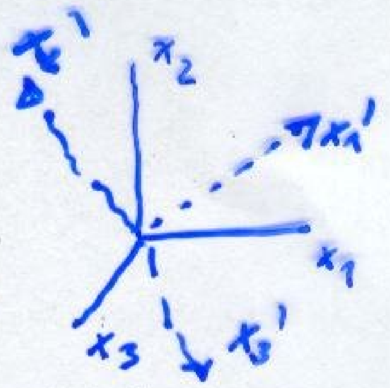
Vzťah medzi napätím a deformáciou, vyjadrený zákonom (6.2-1), možno vyjadriť aj v inverznom tvare

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\,\tau_{kl} \qquad (6.2\text{-}16)$$

kde S_{ijkl} sú konštanty tzv. "komliančného" tenzora. Tento tenzor sa vyznačuje obdobnou symetrickosťou, ako C_{ijkl}.

V maticovom tvare (s využitím kompliančnej matice) môžeme (6.2-16) vyjadriť takto

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1112} & S_{1123} & S_{1131} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & S_{2223} & S_{2231} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3312} & S_{3323} & S_{3331} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1212} & S_{1223} & S_{1231} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2312} & S_{2323} & S_{2331} \\ S_{3111} & S_{3122} & S_{3133} & S_{3112} & S_{3123} & S_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\tau_{12} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \end{bmatrix} \qquad (6.2\text{-}17)$$



6.3 SYMETRIA PRUŽNOSTI (ELASTICITY)

$C'_{opqr} = a_{oi}\, a_{pj}\, a_{qk}\, a_{rl}\, C_{ijkl}$

Elastické vlastnosti sa vyznačujú určitou symetrickosťou. Typ príslušnej symetrie posudzujeme podľa stupňa invariantnosti tenzora C_{ijkl} (alebo S_{ijkl}) pri transformácii súradníc natočením.

Známe sú nasledujúce typy symetrie: 13 13 konštánt nezávisl.

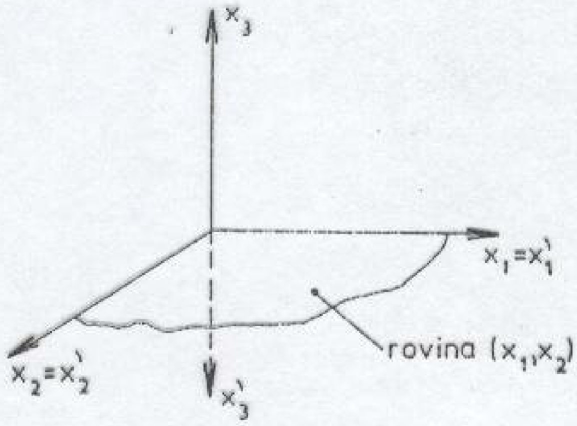
a) symetria vzhľadom na rovinu; monoklinick
b) symetria na dve navzájom kolmé roviny (ortotropia); 9 9
c) rotačná symetria vzhľadom na jednu os (anizotropia); 5 5
d) rotačná symetria na dve navzájom kolmé osi (izotropia). 2 2

a) Symetria vzhľadom na jednu rovinu

Materiál, ktorý sa vyznačuje symetriou elastických vlastností vzhľadom na jednu rovinu, sa nazýva monoklinický.

Uvažujme, že rovinou symetrie je rovina (x_1, x_2) (obr. 6.1). Počiatočný súradnicový systém $(x_i,\ i = 1,2,3)$ sa preklopí do polohy $(x_i',\ i = 1,2,3)$.

Požiadavka je, aby sa elastické konštanty pri prechode jedného súradnicového systému do druhého nezmenili. Smerové kosínusy uhlov medzi osami $(\widehat{x_i', x_j})$ označíme a_{ij}, a pre náš prípad budú



Obr. 6.1
Symetria vzhľadom na rovinu (x_1, x_2)

$$\cos(x_1', x_j) = a_{1j} = (1,0,0)$$

$$\cos(x_2', x_j) = a_{2j} = (0,1,0) \qquad (j = 1,2,3) \qquad (6.3\text{-}1)$$

$$\cos(x_3', x_j) = a_{3j} = (0,0,-1)$$

Podľa (6.2-15) musí potom platiť

$$C'_{1111} = a_{1p}a_{1q}a_{1r}a_{1s}C_{pqrs} =$$

$$= a_{11}a_{11}a_{11}a_{11}C_{1111} + a_{12}a_{12}a_{12}a_{12}C_{2222} + \dots +$$

$$+ a_{11}a_{12}a_{13}a_{13}C_{1233}$$

Pretože všetky $a_{ij} = 0$ pre $i \neq j$, nakoniec dostaneme

$$C'_{1111} = C_{1111} \qquad (6.3\text{-}2)$$

čo podmienke symetrie (invariantnosti) plne vyhovuje. Podobným spôsobom pre tento typ symetrie by sme mali dostať

$$C'_{1123} = a_{1p}a_{1q}a_{2r}a_{3s}C_{pqrs} = C_{1123} \qquad (6.3\text{-}3)$$

čo však nedosiahneme, lebo v skutočnosti je

$$a_{1p}a_{1q}a_{2r}a_{3s}C_{pqrs} = -C_{1123} \qquad (6.3\text{-}4)$$

Aby sa splnila podmienka symetrie (6.3-3), musí byť $C_{1123} = 0$. Takýmto spôsobom sa dá ukázať, že pôvodná matica materiálových vlastností sa zreďukuje na trinásť nezávislých členov

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3312} & 0 & 0 \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2331} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2331} & C_{3131} \end{bmatrix} \qquad (6.3\text{-}5)$$

13 konštánt
(umelý materiál)

Pre závislosť medzi deformáciou a napätím by sme dostali

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1112} & 0 & 0 \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2212} & 0 & 0 \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & S_{3312} & 0 & 0 \\ S_{1112} & S_{2112} & S_{3312} & S_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2323} & S_{2331} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{2331} & S_{3131} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\,\tau_{12} \\ 2\,\tau_{23} \\ 2\,\tau_{31} \end{bmatrix} \qquad (6.3\text{-}6)$$

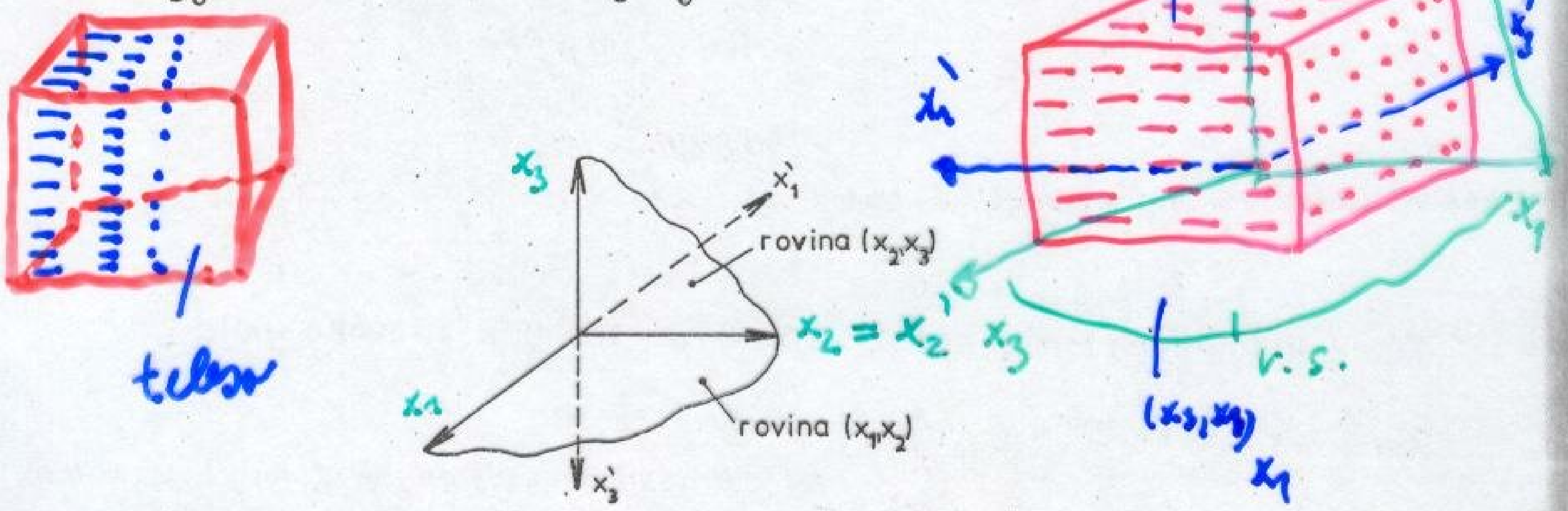
Rovnica (6.3-6) umožňuje robiť prehľadný názor o jednotlivých zložkách deformácie, ak zložky napätia pôsobia jednotlivo. Ak napríklad jediným nenulovým napätím je $\tau_{33} \neq 0$, potom vzniknú tri normálové pomerné predĺženia ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} a jedna zložka pomerného skosenia ε_{12}. Obidve zvyšné zložky ε_{23} a ε_{31} sú rovné nule.

Pri aplikácii zložky τ_{13} sú všetky normálové pomerné predĺženia nulové, len ε_{23} a ε_{31} sú rôzne od nuly.

b) Symetria vzhľadom na dve ortogonálne roviny

Materiál, ktorý sa vyznačuje symetriou elastických vlastností vzhľadom na dve navzájom kolmé roviny, sa nazýva ortotropickým. Nech rovinami symetrie sú (x_1, x_2) a (x_2, x_3) (obr. 6.2), smerové kosínusy $(\widehat{x_i', x_j})$ v tomto prípade budú

$$\begin{aligned} a_{1j} &= (-1,0,0) = \cos(x_1', x_j) \\ a_{2j} &= (0,1,0) = \cos(x_2', x_j) \qquad (j = 1,2,3) \qquad (6.3\text{-}7) \\ a_{3j} &= (0,0,-1) = \cos(x_3', x_j) \end{aligned}$$



Obr. 6.2
Symetria vzhľadom na dve ortogonálne roviny

Požiadavkou symetrie vzhľadom na dve roviny sa nám oproti symetrii na jednu rovinu zníži počet nezávislých konštánt z 13 na 9. Matica materiálových vlastností bude mať tvar

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3131} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix} \qquad (6.3\text{-}8)$$

9

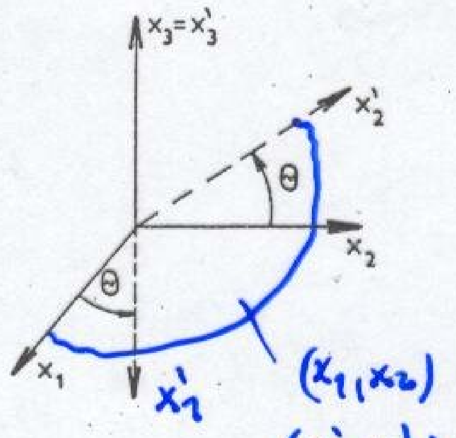
Kompliančná matica má opäť rovnaký tvar ako (6.3-8). Vzhľadom na komplianČnú maticu má závislosť deformácia - napätie tvar

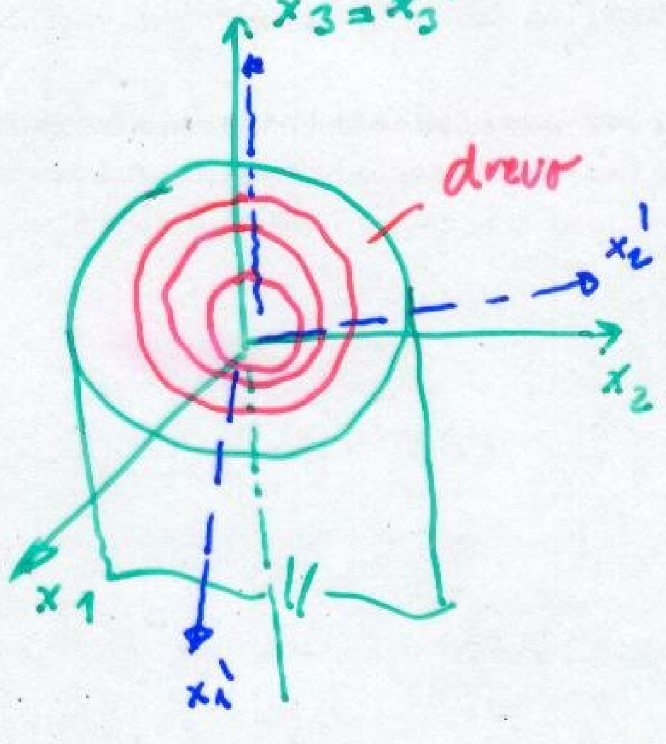
$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\
S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\
S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & S_{1212} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{3131}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\,\tau_{12} \\ 2\,\tau_{23} \\ 2\,\tau_{31} \end{bmatrix}
\qquad (6.3\text{-}9)
$$

Tieto rovnice ukazujú, že pre ortotropické materiály normálové napätia spôsobujú len normálové deformácie a šmykové napätia spôsobujú len pomerné skosenia. Platí to však len pre prípad systému súradníc, ktorý je zhodný so súradnicovým systémom, vzhľadom na ktorý je definovaná symetria.

c) Rotačná symetria vzhľadom na jednu os

Materiál vyznačujúci sa takouto symetriou, sa nazýva anizotropickým. Takáto symetria vyžaduje, aby elastické konštanty ostali nezmenené pri každej rotácii o nejaký uhol Θ okolo osi symetrie (obr. 6.3).





Obr. 6.3
Rotačná symetria na jednu os

Nech touto osou symetrie je x_3. Dá sa dokázať, že pre tento druh symetrie sa nám počet nezávisle premenných zredukuje na päť a matica materiálových vlastností bude mať tvar

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{1111}-C_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} \end{bmatrix} \qquad (6.3\text{-}10)$$

5

Po vyjadrení kompliančnej matice dostaneme vzájomný vzťah medzi deformáciou a napätím

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1122} & S_{1111} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1133} & S_{1133} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(S_{1111}-S_{1122}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1313} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\,\tau_{12} \\ 2\,\tau_{23} \\ 2\,\tau_{31} \end{bmatrix}$$

(6.3-11)

d) Rotačná symetria vzhľadom na dve navzájom kolmé osi

Materiál, ktorý sa vyznačuje symetriou elastických konštánt vzhľadom na natočenie okolo dvoch navzájom kolmých osí, nazývame izotropickým. Vzhľadom na predchádzajúci prípad symetrie, v tomto prípade sa nám počet nezávisle premenných konštánt zníži na dve, pretože dostaneme

$$C_{1313} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122})$$

$$C_{3333} = C_{1111} \qquad (6.3\text{-}12)$$

$$C_{1133} = C_{1122}$$

Matica materiálových vlastností potom bude

$$\begin{bmatrix} \overset{\lambda+2\mu}{C_{1111}} & \overset{\lambda}{C_{1122}} & \overset{\lambda}{C_{1122}} & 0 & 0 & 0 \\ \overset{\lambda}{C_{1122}} & \overset{\lambda+2\mu}{C_{1111}} & \overset{\lambda}{C_{1122}} & 0 & 0 & 0 \\ \overset{\lambda}{C_{1122}} & \overset{\lambda}{C_{1122}} & \overset{\lambda+2\mu}{C_{1111}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overset{\mu}{\tfrac{1}{2}(C_{1111}-C_{1122})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overset{\mu}{\tfrac{1}{2}(C_{1111}-C_{1122})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \overset{\mu}{\tfrac{1}{2}(C_{1111}-C_{1122})} \end{bmatrix} \quad 2$$

(6.3-13)

Závislosť medi deformáciou a napätím upravíme na tvar

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1122} & & & \\ S_{1122} & S_{1111} & S_{1122} & & & \\ S_{1122} & S_{1122} & S_{1111} & & & \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{\tfrac{1}{2}(S_{1111}-S_{1122})}_{\text{pôvodne označený ako } G_{1212}} & & \\ 0 & 0 & 0 & & \tfrac{1}{2}(S_{1111}-S_{1122}) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \tfrac{1}{2}(S_{1111}-S_{1122}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ 2\tau_{12} \\ 2\tau_{23} \\ 2\tau_{31} \end{bmatrix}$$

(6.3-14)

Elastické konštanty v (6.3-13) sa označujú obyčajne takto:

$$C_{1122} = \lambda$$

$$C_{1212} = \frac{1}{2}\,(C_{1111} - \overset{\lambda}{C_{1122}}) = \mu \qquad (6.3\text{-}15)$$

$$C_{1111} = \lambda + 2\,\mu$$

Dvojicu konštánt λ, μ nazývame Lamého konštantami. Vzťah medzi napätím a deformáciou vyjadríme na základe (6.3-15) v tvare

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix} \qquad (6.3\text{-}16)$$

alebo skráteným zápisom

napr.: $\tau_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda \overset{1}{\delta_{11}}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}) =$
$= 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33})$

$$\tau_{ij} = 2\,\mu\,\varepsilon_{ij} + \lambda\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{nn} \qquad (6.3\text{-}17)$$

A pre inverznú závislosť by sme z (6.3-17) dostali

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\,\frac{-\lambda}{2\mu(3\,\lambda + 2\mu)}\,\tau_{nn} + \frac{1}{2\,\mu}\,\tau_{ij} \qquad (6.3\text{-}18)$$

Obvykle musíme požadovať, aby $\mu \neq 0$ a $3\,\lambda + 2\mu \neq 0$. Vzťah (6.3-18) odvodíme napr. takto: Z rovnice (6.3-17) máme

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\,\mu}\,\tau_{ij} - \frac{\lambda}{2\,\mu}\,\delta_{ij}\,\varepsilon_{nn} \qquad (6.3\text{-}19)$$

! Zúžením (6.3-19) dostaneme (pričom $\delta_{ii} = 3$)

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\,\mu}\,\tau_{ii} - \frac{3\,\lambda}{2\,\mu}\,\varepsilon_{nn} \qquad (6.3\text{-}20)$$

a po premenovaní sčítacích indexov i na n

$$\varepsilon_{nn} = \frac{1}{2\,\mu}\,\tau_{nn} - \frac{3\,\lambda}{2\,\mu}\,\varepsilon_{nn} \qquad (6.3\text{-}21)$$

$\varepsilon_{nn}\left(1+\frac{3\lambda}{2\mu}\right) = \frac{1}{2\mu}\tau_{nn}$

$\varepsilon_{nn}\,\frac{2\mu+3\lambda}{2\mu} = \frac{\tau_{nn}}{2\mu}$

Úpravou (6.3-21) pre ε_{nn} napokon máme

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\tau_{nn}}{2\mu + 3\,\lambda} \qquad (6.3\text{-}22)$$

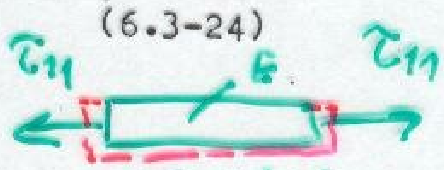
a po dosadení do (6.3-19) dostaneme rovnicu (6.3-18).

Aby sme videli fyzikálny význam Lamého konštánt, vyjadríme z rovnice (6.3-18) hodnotu pomerného predĺženia $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} \dfrac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \tau_{nn} + \dfrac{1}{2\mu} \tau_{ij}$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \tau_{11} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}) \qquad (6.3\text{-}23)$$

Ak uvažujeme jednoosovú napätosť, potom $\tau_{22} = \tau_{33} = 0$ a z (6.3-23) je

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu} \left(1 - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \right) \tau_{11} = \frac{\tau_{11}}{E} \qquad (6.3\text{-}24)$$



(čistý ťah)

len $\tau_{11} \neq 0$

$\tau_{11} = E \cdot \varepsilon_{11}$

$\varepsilon_{11} = \dfrac{\tau_{11}}{E}$

$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\dfrac{\tau_{11}}{E} \nu$

$= -\nu \varepsilon_{11}$

E je modul pružnosti v ťahu, pre ktorý zo (6.3-24) dostaneme

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}$$

Pre zložku deformácie ε_{22} z rovnice (6.3-23) vypočítame

$$\varepsilon_{22} = - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \tau_{11} = -\frac{\nu}{E} \tau_{11} \qquad (6.3\text{-}25)$$

a zároveň taktiež pre jednoosovú napätosť platí rovnica

$$\varepsilon_{22} = - \frac{\nu}{E} \tau_{11} \qquad (6.3\text{-}26)$$

kde ν je Poissonove číslo.

Porovnaním (6.3-25) a (6.3-26) pre Poissonove číslo dostaneme

$$\nu = \frac{\lambda E}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \qquad (6.3\text{-}27)$$

a po dosadení za modul pružnosti podľa (6.3-24) nakoniec máme

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \qquad (6.3\text{-}28)$$

Riešením rovníc (6.3-24) s (6.3-28) pre konštanty λ a μ dospejeme k výrazom

$$\overset{\lambda}{\cancel{\nu}} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} , \qquad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \equiv G \tag{6.3-29}$$

pričom je zaužívané označenie $\mu = G$, kde pod G rozumieme modul pružnosti materiálu v šmyku.

Nahradením Lamého konštánt v rovnici (6.3-17) a (6.3-19) materiálovými konštantami E, ν dostaneme vzťahy pri izotrópny materiál

$$\tau_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{nn} \quad ! \tag{6.3-30}$$

resp.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \tau_{ij} - \nu \delta_{ij} \tau_{kk} \right] \quad ! \tag{6.3-31}$$

Na záver si uvedieme tabuľku, v ktorej si pre názornosť uvedieme dosiahnuté vzájomné vzťahy medzi Lamého konštantami a materiálovými konštantami E, ν.

Závislosť medzi materiálovými konštantami — Tabuľka 6.1

Konštanty	Základná dvojica: $\lambda, \mu = G$	Základná dvojica: E, ν
λ	λ	$\dfrac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$
$\mu = G$	μ, G	$\dfrac{E}{2(1 + \nu)}$
E	$\dfrac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	E
ν	$\dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	ν

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ & & & & G & 0 \\ & \text{sym.} & & & & G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}$$

6.4 NEVISKÓZNA KVAPALINA

(tekutina)

Je to taká kvapalina, pre ktorú je tenzor napätia izotropický

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \qquad (6.4\text{-}1)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerova delta a p je skalár (tlak). V maticovom vyjadrení

$$(\tau_{ij}) = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \qquad (6.4\text{-}2)$$

V ideálnom tvare je pre plyn tlak p vzťahovaný v stavovej rovnici na objem a teplotu

$$\frac{p}{\varrho} = RT \qquad (6.4\text{-}3)$$

$p \cdot v = RT$ $\quad v = \frac{1}{\rho}$

Vo vzťahu (6.4-3) R predstavuje plynovú konštantu, T - teplotu a ϱ mernú hmotnosť.

Pre reálny plyn alebo kvapalinu môžeme stavovú rovnicu napísať v tvare

$$f(p,\varrho,T) = 0 \qquad (6.4\text{-}4)$$

Väčšinu kvapalín však môžeme považovať za nestlačiteľnú, čo možno vyjadriť podmienkou

$$\varrho = \text{konst} \qquad (6.4\text{-}5)$$

Pri plynoch je obvykle hustota funkciou tlaku $\varrho = \varrho(p)$ a vtedy treba prihliadať aj na stavovú rovnicu. Napríklad vodu a vzduch možno pokladať za neviskóznu tekutinu. Na základe týchto vzťahov môžeme povedať, že neviskózna tekutina nekladie odpor voči zmene tvaru. Tento odpor nazývame viskozitou a z toho potom vyplýva názov neviskózna tekutina. Ak je neviskózna tekutina v rovnováhe, potom v každom jej bode pôsobí tlak vo všetkých smeroch rovnaký, kolmo na ľubovoľnú elementárnu plošku. Pretože tlak p je skalárom, zložky napätia podľa (6.4-2) nie sú závislé od zmeny vzťažného súradnicového systému.

6.5 NEWTONOVSKÉ VISKÓZNE TEKUTINY

Newtonovská tekutina je viskózna tekutina, pre ktorú je šmykové napätie priamoúmerné rýchlosti deformácie. Vzájomný vzťah medzi napätím a deformáciou je definovaný rovnicou

$$\tau_{ij} = - p\delta_{ij} + D_{ijkl} V_{kl} \tag{6.5-1}$$

kde τ_{ij} je tenzorom napätia, V_{kl} je tenzor rýchlosti deformácie, D_{ijkl} je <u>tenzor</u> (koeficientov) <u>viskozity</u> tekutiny a p je statický tlak. Člen $-p\delta_{ij}$ reprezentuje možný zvyškový stav napätia, ak $V_{kl} = 0$. Tlak p je, v zhode so stavovou rovnicou, uvažovaný ako funkcia hustoty a viskozity tekutiny. Ďalej budeme uvažovať, že zložky D_{ijkl} môžu závisieť od teploty, ale sú nezávislé od napätí a rýchlosti deformácie. Tenzor D_{ijkl} je tenzorom štvrtého stupňa a má, podobne ako pri hookeovskom telese, $3^4 = 81$ zložiek. Vzhľadom na symetriu τ_{ij} a V_{kl}, a tiež podľa atomistickej štruktúry, sa počet nezávislých zložiek zníži podľa zložitosti uvažovanej tekutiny.

Väčšina uvažovaných tekutín má izotropické vlastnosti, pre ktoré je štruktúra D_{ijkl} veľmi jednoduchá.

Pre tento prípad symetrie možno D_{ijkl} vyjadriť pomocou dvoch nezávislých konštánt λ a μ.

$$D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{6.5-2}$$

a po úprave môžeme vzťah (6.5-1) napísať v tvare

$$\tau_{ij} = - p\delta_{ij} + \lambda V_{lk}\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} \tag{6.5-3}$$

Zúžením tenzora τ_{ij} dostaneme

$$\tau_{kk} = - 3p + (3\lambda + 2\mu)V_{kk} \tag{6.5-4}$$

Pretože $\tau_{kk} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$ je veličina invariantná, je nezávislá aj od rýchlosti deformácie. Je zrejmé, že $p = -\frac{\tau_{kk}}{3}$, čo má za následok podmienku

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

a odtiaľ

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

Na základe toho môžeme (6.5-3) vyjadriť v závislosti len od jednej nezávislej konštanty μ

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu V_{ij} - \frac{2}{3} V_{kk}\delta_{ij} \qquad (6.5\text{-}5)$$

Rovnica (6.5-5) je nazvaná Stokesovou a tekutina, ktorá ju splňuje, je Stokesovou tekutinou. Konštantu μ nazývame koeficientom viskozity. Ak $\mu = 0$, potom z (6.5-5) dostaneme rovnicu neviskóznej tekutiny

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Prítomnosť statického tlaku p v konštitutívnych rovniciach spôsobuje hlavný rozdiel medzi mechanikou tekutín a napr. elastostatikou. Tento tlak je obsiahnutý v stavovej rovnici

$$f(p,\varrho,T) = 0$$

Tekutiny, ktoré nespĺňajú uvedené rovnice, nazývame nenewtonovskými tekutinami. Je to napríklad v prípade, ak viskozita závisí od rýchlosti deformácie.

6.6 VPLYV TEPLOTY

V predchádzajúcich kapitolách sme predpokladali nemennosť materiálových vlastností, C_{ijkl} resp. D_{ijkl} vzhľadom na zmenu teploty. Je zrejmé, že tieto zákony možno použiť len pre izotermálne procesy. Ak uvažujeme teplotnú závislosť, musia sa základné zákony vyjadriť v závislosti od zmeny teploty.

Pre elastické telesá môžeme Hookeov zákon modifikovať do Duhamel - Neumannovho tvaru, o ktorom podrobnejšie píšeme v kapitole 9.